概均質ベクトル空間のGauss和(概均質ベクトル空間の展望)

川中, 宣明; 行者, 明彦

数理解析研究所講究録
555巻 1985年 32-47

概均質ベクトル空間のGauss和(*)

川中宣明
阪大・理
行者明彦

1. (G, V)：既約，正則概均質ベクトル空間 $/\mathbb{C}$

$V^\vee$: V の dual space

f : V の既約相対不変式

$S = \{ v \in V \mid f(v) = 0 \}$

$\mathcal{O} = V - S$

$j : V - S \hookrightarrow V$

$d = \deg f$

$n = \dim V$

$\langle\ ,\ \rangle : V^\vee \times V \longrightarrow \mathbb{C}$ pairing

dual の概均質ベクトル空間において，f，S，$\mathcal{O}$，j にあたるものを，$f^\vee$ $S^\vee$ $\mathcal{O}^\vee$ $j^\vee$ と書く．（定義については [20] 参照）

佐藤・木村の分類を見ると([20])，V には，自然に $\mathbb{Z}$-scheme の構造が，入ることがわかる。（この $\mathbb{Z}$-scheme の構造を，もっと intrinsic に，定めることもできる。）従って，

reduction mod p により、有限体$\mathbb{F}_q$上の既約・正則概均質ベクトル空間が、得られる。(pが、あまり小さいと、既約、正則、概均質といった条件は、破れるので、以下の話では、pは適当に、大きいものとしておく。どれだけ大きくすればよいかは、分類[20]を用いて、個別に計算すれば、わかる。11節参照)

2. $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$: ℓ進体の代数閉包

χ : $\mathbb{F}_q^\times \longrightarrow \mathbb{C}^\times$ $(\cong \overline{\mathbb{Q}}_\ell^\times)$ 乗法指標

ψ : $\mathbb{F}_q \longrightarrow \mathbb{C}^\times$ $(\cong \overline{\mathbb{Q}}_\ell^\times)$ 加法指標 $(\psi \neq 1)$

とし、$\chi(0) = 0$と定義する。可換群 $\mathrm{Hom}(\mathbb{F}_q^\times, \mathbb{C}^\times)$の元としての、$\chi$の位数を $\mathrm{ord}\,\chi$ と書く。このとき、

$$\mathcal{F}_\psi[\chi\circ f](v^\vee) = \sum_{v\in V(\mathbb{F}_q)} \chi(f(v))\,\psi(\langle v^\vee\ v\rangle) \qquad (v^\vee \in V^\vee(\mathbb{F}_q))$$

とおき、これを概均質ベクトル空間の Gauss 和と呼ぶ。[11]

3. fのb-函数を、

$$b_f(s) = b_0\prod_{j=1}^{d}(s+\alpha_j) \qquad (d = \deg f)$$

とし、

$$b_f^{exp}(t) = \prod_{j=1}^{d}\left(t - e^{2\pi\sqrt{-1}\,\alpha_j}\right)$$

とすると、[9] [16] を使って $b_f^{exp}(t) \in \mathbb{Z}[t]$ が、わかる。
[8] より、$\alpha_j \in \mathbb{Q}$ だから、

$$b_f^{exp} = \prod_{\ell \geq 1} \Phi_\ell^{m_f(\ell)}$$

$\Phi_\ell = \ell$ 次円分多項式

と書ける。

4. <u>予想</u>　$p \gg 0$, $v^\vee \in \mathcal{O}^\vee(\mathbb{F}_q)$ の時

$$(\#) \qquad \mathcal{F}_\psi[\chi \circ f](v^\vee) = \varepsilon_{\chi,\psi}\, q^{\frac{1}{2}(\dim V - m_f(\mathrm{ord}\,\chi))} (\chi^{-1} \otimes \theta_\chi)(f^\vee(v^\vee))$$

$$|\varepsilon_{\chi,\psi}| = 1$$

$$\theta_\chi = \begin{cases} 1 & \text{if } \frac{n}{d} \in \mathbb{Z} \\ \text{Legendre symbol} & \text{if } \frac{n}{d} \in \frac{1}{2} + \mathbb{Z} \end{cases}$$

5. <u>定理</u>　(i) $m_f(\mathrm{ord}\,\chi) = 0$ なら、予想は OK.
(ii) (G, V) が [20] の分類で、type (11) でなければ、予想は、OK.

6. <u>注意</u>　以下を見ればわかるように、この定理は、$\mathcal{E}f^s$ ($\mathcal{E}$ は、micro-differential operators の層) の構造に関する問題に帰着させることで、証明される。type (11) が、

除外されるのは、この場合に、$\mathcal{E}f^{s}$の構造が、まだ、十分にわからないことによる。

注意　pを、どのくらい大きくとればよいかは、個別に計算すればわかる。(例えば type (1) なら無制限、type (2) なら $p\neq 2$, ...)

7. 注意 (この節については、[15]参照)

$$|\cdot|^{\frac{1}{1-q}} : \text{Teichmüller character}$$

$$\gamma(s) = -\frac{1}{\sqrt{q}} \sum_{x\in\mathbb{F}_q^{\times}} |x|^{s}\,\psi(x) \qquad \left(s\in\frac{1}{1-q}\mathbb{Z}/\mathbb{Z}\right)$$

とする。少々、雑ではあるが、(#)は、次のように書きかえられる。

$p \gg 0$, $v^{\vee}\in O^{\vee}(\mathbb{F}_q)$ のとき

$$q^{-\frac{n}{2}}\,\mathcal{F}_{\psi}[\,|f|^{s}\,](v^{\vee}) = \varepsilon'_{\psi}(s)\left(\prod_{j=1}^{d}\gamma(s+\alpha_j)\right)\cdot|f^{\vee}(v^{\vee})|^{-s-\frac{n}{d}}$$

$$|\varepsilon'_{\psi}(s)| = 1.$$

Gross-Koblitz の公式により、Gauss和と、p進Γ函数が、本質的に同じものであることを思い出せば、上の予想一定理(有限体の場合)と、$\mathbb{R}$の場合との類似は、明らかであろう。

裏返し変換に関して、$\mathcal{F}_{\psi}[\chi\circ f]$が、どうかわるかは、よく

わかっているので、以下、必要ならば"被約"という仮定をおきながら、定理の証明をする。(スケッチ)

8. (この節では、$\overline{\mathbb{F}}_q$上で考える。)

[5; p172, 定義1.7]で、定義された、$\mathbb{A}^1$, $\mathbb{A}^1-\{0\}$ 上の、(étale) sheaf $\mathcal{F}(\psi)$, $\mathcal{F}(\chi)$ を、ここでは、$\mathcal{L}_\psi$, $\mathcal{L}_\chi$ と書くことにする。(χ, ψ については、2節)

$$\begin{tikzcd}
& V^\vee \times V \arrow[dl, "pr^\vee"'] \arrow[dr, "pr"] \arrow[rr, "\langle\ \rangle"] & & \mathbb{A}^1 & \\
V^\vee & & V & V-S \arrow[l, hook', "j"] \arrow[r, "f"] & \mathbb{A}^1-\{0\}
\end{tikzcd}$$

を自然に定義する。V上の sheaf $\mathcal{G}$ に対し、

$$\mathcal{F}_\psi[\mathcal{G}] = pr^\vee_![pr^*\mathcal{G}\otimes\langle\ \rangle^*\mathcal{L}_\psi] \qquad (\text{Fourier変換})$$

とおく。([2] [10]) ここで、$pr^\vee_!$ は、通常 $Rpr^\vee_!$ と書くものであるが、すべての話しが、derived category で、進むので、R, L は省略する。この時、

$$\mathcal{F}_\psi[\chi\circ f](v^\vee)=\sum_{i\geq 0}(-1)^i\,\mathrm{Tr}(F; H^i(\mathcal{F}_\psi[j_!f^*\mathcal{L}_\chi])_{v^\vee})$$

ここで、Fは、Frobenius endomorphism. 従って、次の二つを示せば、十分である。

8.1. $\mathcal{F}_\psi[j_! f^* \mathcal{L}_\chi]\big|_{V^\vee - S^\vee} = f^{\vee *} \mathcal{L}_{\chi^{-1} \otimes \theta_\chi} [-\dim V] \big|_{V^\vee - S^\vee}$

8.2. $\mathcal{F}_\psi[j_! f^* \mathcal{L}_\chi]\big|_{V^\vee - S^\vee}$ は. pure of weight $-m_f(\operatorname{ord}\chi)$

(pure sheaf の定義については、[4] 参照) まず. (8.1) から考える.

9. (この節では. $\overline{\mathbb{F}_q}$ 上)

まず. Jacobi 和の類似物を考える.

$$\left(\sum_{x \in \mathbb{F}_q^\times} \chi^{-d}(x)\,\psi(-x)\right)\left(\sum_{v \in V(\mathbb{F}_q)} \chi(f(v))\,\psi(\langle v^\vee v\rangle)\right)$$

$$= \sum_{\substack{v \\ x \neq 0}} \chi(f(x^{-1}v))\,\psi(\langle v^\vee v\rangle - x)$$

$$= \sum_{\substack{v \\ x \neq 0}} \chi(f(v))\,\psi(x(\langle v^\vee v\rangle - 1))$$

$$= \sum_{\substack{v \\ x \in \mathbb{F}_q}} \chi(f(v))\,\psi(x(\langle v^\vee v\rangle - 1)) - \sum_{v} \chi(f(v))$$

$$= \sum_{\substack{v \\ \langle v^\vee v\rangle = 1}} \chi(f(v)) - \sum_{v} \chi(f(v))$$

この計算を. 逐語的に. sheaf の言葉に翻訳すると. 次の distinguished triangle ([5; p265] 参照) を得る:

9. 1.

$$\begin{tikzcd} & pr^{\vee}_{!}\, pr^{*}(j_{!} f^{*}\mathcal{L}_{\chi}) \arrow[dl, "+1"'] & \\ \mathcal{F}_{\psi}[j_{!}f^{*}\mathcal{L}_{\chi}][-1] \arrow[rr] & & (pr^{\vee}|_{H})_{!}(pr|_{H})^{*}(j_{!}f^{*}\mathcal{L}_{\chi})[-2] \arrow[ul] \end{tikzcd}$$

これは．0.

但し．

$$H = \{ (v^{\vee}\ v) \in V^{\vee} \times V \mid \langle v^{\vee}\ v \rangle = 1 \}$$

<u>注意</u> （多変数の）Fourier 変換は．Radon 変換と．一変数の Fourier 変換に分解するが．（[6 ; Chapter 1] 参照）triangle (9.1) を考えることは．Fourier 変換に．一変数の Fourier 逆変換をほどこして．話しを．Radon 変換に帰着させることにあたる．

10. （この節では．$\mathbb{C}$上）

$s = 1/\mathrm{ord}\,\chi$ とし．χ^{s} が．定める $\mathbb{C}-\{0\}$ 上の locally constant sheaf を．$\mathcal{L}_{s}$ とする。$\mathcal{F}$ を [3], [7] の意味の Fourier 変換とすると．(9.1) と同様にして．次の triangle を得る。

10. 1.

$$\begin{tikzcd} & pr^{\vee}_{!}\, pr^{*}(j_{!} f^{*}\mathcal{L}_{s}) \arrow[dl, "+1"'] & \\ \mathcal{F}[j_{!}f^{*}\mathcal{L}_{s}][-1] \arrow[rr] & & (pr^{\vee}|_{H})_{!}(pr|_{H})^{*}(j_{!}f^{*}\mathcal{L}_{s})[-2] \arrow[ul] \end{tikzcd}$$

これは 0.

さて、f^sの、Gに関する相対不変性を、Lie(G)を用いて、infinitesimalに記述すると、それは、微分方程式と考えられる。(⊨[19]の(4.1))これを、$\mathcal{D}$-moduleと見たものを、$\mathcal{M}'_s$とし、$\mathcal{M}_s = \mathcal{M}'_s[\frac{1}{f}]$とおくと、

$$\mathcal{F}[j_! f^* \mathcal{L}_s] = DR(\mathcal{F}[\mathcal{M}_s^*])$$

であるから、(DR, *, については、[17]参照)議論を、微分方程式の話しに帰着させて、$\mathcal{F}[j_! f^* \mathcal{L}_s]$が、求められる。従って、

$$pr^\vee_! pr^* \mathcal{L}_s, \quad (pr^\vee|_H)_! (pr|_H)^* \mathcal{L}_s$$

の、reduction mod p が、うまく(i.e. $\mathbb{Z}_p$-scheme上のsheafと見た時のsmoothness)

$$pr^\vee_! pr^* \mathcal{L}_\chi, \quad (pr^\vee|_H)_! (pr|_H)^* \mathcal{L}_\chi$$

になれば、(8.1)が、証明できる。これは、$p \gg 0$ならば、OKだが、次に述べるやり方で、具体的に、pがどれだけ大きければよいかが、わかる。

<u>注意</u> [3][7]の、Fourier変換の定義には、半空間という、$\mathbb{C}$に特有のものが、含まれ、8節に、出てきたFourier変換$\mathcal{F}_\psi$には、Artin-Schreier sheaf $\mathcal{L}_\psi$という、$\overline{\mathbb{F}}_q$に特有のものが、含まれていたため、(9.1) (10.1)というtrianglesを使わないで、直接にreduction mod pを考えることはできない。

11. （この節では、mixed characteristic）

reduction mod p が、"うまく"行く場合を思い出すと：

11.1. （complete smooth variety）

または、もう少し、一般に：

11.2. （complete smooth variety）−（normal crossing）

くらいしかない。我々が問題にしている sheaf $j_! f^* \mathcal{L}_x$ (or $j_! f^* \mathcal{L}_s$) は、実質的に、$V-S$ 上の sheaf であるから、(11.2) を直接、使おうとすると、S の特異点を、具体的な形で、解消しなければならない。これは、なかなかうまくいかない。

ところが、よく知られているように、GL_n (i.e. [20] の type (1) の場合の $V-S$) の、多様体としての cohomology の、reduction mod p に関する不変性が、次のようにして、証明できる：

（証明）　$E_n = \{ n \times n$ 上半三角行列 $\}$

$B_n = E_n \cap GL_n$　（Borel 部分群）

とすると、

$$GL_n \longrightarrow GL_n/B_n$$

は、(11.1)型の base をもち、(11.2)型の fibre をもつ、fibre bundle になる。そこで、spectral sequence を使えば、目的の結果を得る。 ▨

この証明を見て、想像されるように、一般の既約、正則、被約、概均質ベクトル空間でも、E_n にあたる subspace が、うまくみつかれば、同様の議論ができるはずである。それが、実際に、みつかる。

<u>命題～定義</u>

V：既約、正則、被約、概均質ベクトル空間、

B：G の Borel 部分群

B_0：generic isotropy 群の、Borel 部分群

とするとき、

(i) V の B-stable な subspace E が、$V-S$ と交わるなら、

$$\dim E \geqslant \dim B - \dim B_0$$

であり、等号の成立する場合、E を（仮に）Borel subspace と呼ぶ。

(ii) Borel subspace E で、$E \cap S$ が、normal crossing になるか、または、ordinary double しか持たないものが、存在する。

この証明は、case-by-case check であり、不満が残るが、とにかく、このおかげで、reduction mod p に関する精密な議論が、できる。

10.

注意 Borel subspace は、水野氏の、E_n型代数群（任意標数）の、ユニポテント共役類の分類の仕事の中で、最初に（implicit に）あらわれた。最近の、村上順氏の仕事では、big cell の、概均質ベクトル空間における類似物が、大きな役割りを、はたしていることにも、注意しておく。

これで、(8.1)の証明のあらすじは、完了した。次に、(8.2) を考える。

12. $j_! f^* \mathcal{L}_x$ は、perverse sheaf であり、（perverse sheaf については、[1] [17] 参照）perverse sheaf は、weight filtration を持つので（[1] 定理 5.3.5）

$$j_! f^* \mathcal{L}_x = W_0 \supset W_{-1} \supset W_{-2} \supset \cdots$$

を weight filtration とする。（derived category における、"filtration" については [1] 3.1 節）11 節の議論により、この filtration は、標数 0 に、持ち上げられる：

$$j_! f^* \mathcal{L}_s = W_0 \supset W_{-1} \supset W_{-2} \supset \cdots$$

さらに、Riemann-Hilbert 対応　　　　により、次の filtration が、得られる：

$$\mathcal{M}_s = \mathcal{N}_0 \supset \mathcal{N}_{-1} \supset \mathcal{N}_{-2} \supset \cdots$$

pure な perverse sheaf が、semi-simple で、あること

より [1 ; (5. 3. 8)]

12.1. $\mathcal{N}_{-i}/\mathcal{N}_{-i-1}$ = simple $\mathcal{D}$-modules の直和.

また. perverse sheaf の weight filtration の存在 [1; (5.3.5)] の証明と同様にして

12.2. $\mathcal{W}_{-i} \supset \mathcal{W}_{-i-1} = \mathcal{W}_{-i-2}$

ならば. $\mathcal{W}_{-i}$ において. $\mathcal{W}_{-i-1}$ の complement が.
存在する.

ことが. わかる. さらに. [19] の一般論と. [12] [13] [14] [18] [19] の具体的な計算により. $\mathcal{E}\otimes\mathcal{M}_s$ の $\mathcal{E}$-module としての構造は. [20] の type(11) $=$ $(SL_5\times GL_4,\ \Lambda^2(V_5)\otimes V_4)$ を除いて. きわめてよく. わかっている。特に. $\mathcal{E}$-submodule として. どのようなものが. 存在するか. また. 存在しないかが. 十分にわかっていて. その知識と. (12.1), (12.2) をあわせると

$$\mathcal{N}_0 \supsetneqq \mathcal{N}_{-1} \supsetneqq \cdots \supsetneqq \mathcal{N}_{-m_f(\mathrm{ord}\,\chi)} \supsetneqq \mathcal{N}_{-m_f(\mathrm{ord}\,\chi)-1} = 0$$

$$\mathrm{Supp}\,\mathcal{E}\otimes\mathcal{N}_{-m_f(\mathrm{ord}\,\chi)} \supset V^\vee\times\{0\}$$

が. わかる. これから. $j_!f^*\mathcal{L}_\chi$ の組成因子で. その Fourier 変換が. $V^\vee - S^\vee$ 上で. 生き残るものを. $\mathcal{G}$ とすると.

$$\mathcal{G} = \text{pure of weight } -m_f(\mathrm{ord}\,\chi).$$

ここで. [4] の主結果と. $\mathcal{F}_\psi$ が. Verdier dual と可換

であること [10; (2.1.5)] を使うと.

$$\mathcal{F}_\psi[g] = \text{pure of weight } -m_f(\operatorname{ord} \chi)$$

さらに.

$$\mathcal{F}_\psi[j_! f^* \mathcal{L}_\chi]\big|_{V^\vee - S^\vee} = \mathcal{F}_\psi[g]\big|_{V^\vee - S^\vee}$$

であるから. (8.2) を得る.

13. 注意 $\mathcal{E} \otimes \mathcal{M}_s$ の submodule の存在・非存在(特に.非存在)に.関する部分で. 佐藤・木村の「分類」を. 本質的に用いたが. local b-function を用いて (分類は用いずに) 本来. 議論できるはずであるが....

(*) 本稿は、行者が. 執筆した。概均質ベクトル空間の. Gauss 和というものの定義された背景. その他、については. 「代数的整数論 シンポジウム (1984年 7月)」の報告集に所収の稿を. 見ていただきたい. そちらの方は. 川中が. 執筆している.

References

[1] A. A. Beilinson, J. Bernstein, P. Deligne : Faisceaux pervers, Astérisque N°100 (1982)

[2] J. L. Brylinski : Transformations canoniques, dualité projective, théorie de Lefschetz, transformations de Fourier et sommes trigonométriques. Preprint.

[3] J.L. Brylinski, B. Malgrange, J.L. Verdier : Transformation de Fourier geometrique, I. C.R. Acad. Sc. Paris 297 (1983) 55-58.

[4] P. Deligne : La conjecture de Weil II. Publ. Math. IHES 52 (1980) 137-252

[5] P. Deligne et al. : SGA $4\frac{1}{2}$, Lecture Notes in Math. 569. Springer

[6] I. M. Gel'fand, M. I. Graev, N. Ya. Vilenkin: Generalized functions. vol 5.

[7] R. Hotta, M. Kashiwara : The invariant holonomic system on a semisimple Lie algebra, Inventiones Math. 75 (1984) 327-358

[8] M. Kashiwara : B-functions and holonomic systems. Inventiones Math. 38 (1976) 33-53

[9] M. Kashiwara : Holonomic systems of Linear differential equations with regular singularities and related topics in

topology, Adv. in Pure Math. vol 1, Kinokuniya.

[10] N.M. Katz, G. Laumon: Transformation de Fourier et majoration de sommes exponentielles, Dissertation.

[11] N. Kawanaka: Open problems in algebraic groups, Katata Symp. Proc. P13

[12] T. Kimura: The b-functions and holonomy diagrams of irreducible regular prehomogeneous vector spaces, Nagoya Math. J. 85 (1982) 1-80

[13] T. Kimura, M. Muro: On some series of regular irreducible prehomogeneous vector spaces, Proc. Japan Acad., Ser.A. 55 (1979) 384-389

[14] T. Kimura, I. Ozeki: On the microlocal structure of a regular prehomogeneous vector space associated with Spin(10)×GL(3), Proc. Japan Acad., 58 Ser.A (1982) 239-242

[15] S. Lang: Cyclotomic fields II, Springer

[16] B. Malgrange: Polynomes de Bernstein-Sato et cohomology evanesants, Astérique 101-102 (1983)

[17] 野海正俊: Constructible $\mathbb{C}_X$ 加群と holonomic $\mathcal{D}_X$ 加群, 数学 36巻2号 (1984) 125-136

[18] I. Ozeki : On the microlocal structure of a regular prehomogeneous vector space associated with GL(8), Proc. Japan Acad., 56, Ser. A (1980) 18-21.

[19] M. Sato, M. Kashiwara, T. Kimura, T. Oshima : Micro-local analysis of prehomogeneous vector spaces, Inventiones Math. 62 (1980) 117-179.

[20] M. Sato, T. Kimura : A classification of irreducible prehomogeneous vector spaces and their relative invariants, Nagoya Math. J. 65. (1977) 1-155.